5章　補章

§3　3章の補足（p.151〜p.153）

問1

（1）　$x^2+y^2 \leqq x$ より

$$x^2-x+y^2 \leqq 0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \leqq 0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

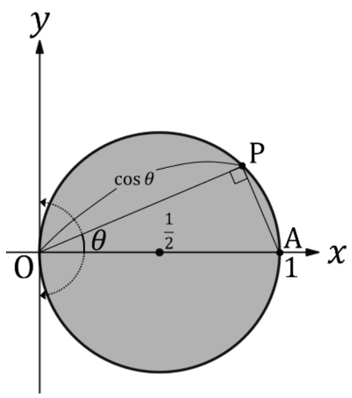
となるから，領域は下の図のようになる．

また，この図において，点 A(1，0)とし，円周上の任意の点を P とする．

円周角の性質より，$\angle \mathrm{AOP}$は常に直角となるから，

$\angle \mathrm{AOP}=\theta$とすると，$\mathrm{OP}=1\cdot\cos\theta=\cos\theta$となる．

領域を図示すると



これより，領域Dは以下の不等式で表すことができる．

$0 \leqq r \leqq \cos\theta$，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

したがって，与式を極座標に変換すると

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \iint_D \sqrt{r^2}\cdot r\,drd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{\cos\theta} r^2\,dr\right\}d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^{\cos\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta \quad ※被積分関数が偶関数 \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{4}{9}}
\end{aligned}$$

（2）　$x^2+y^2 \leqq 2y$ より

$$x^2+y^2-2y \leqq 0$$

$$x^2+(y-1)^2-1^2 \leqq 0$$

$$x^2+(y-1)^2 \leqq 1$$

となるから，領域は下の図のようになる．

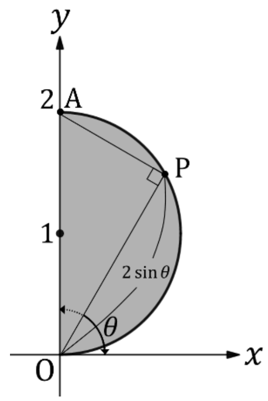
また，この図において点 A(0，2)とし，円周上の任意の点を P とする．

円周角の性質より，$\angle \mathrm{AOP}$は常に直角となるから，

OPとx軸（$x \geqq 0$）がなす角をθとすると，

$\angle \mathrm{AOP}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$であるから，$\mathrm{OP}=2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

よって，$\mathrm{OP}=2\sin\theta$



これより，領域Dは以下の不等式で表すことができる．

$0 \leqq r \leqq 2\sin\theta$，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

したがって，与式を極座標に変換すると

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \iint_D r\cos\theta\cdot r\,drd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{2\sin\theta} r^2\cos\theta\,dr\right\}d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^{2\sin\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{3}\cdot 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^3\theta\,d\theta
\end{aligned}$$

ここで，$\sin\theta=t$とおくと，$\cos\theta\,d\theta=dt$より

また，θとtの対応は

θ	0	$\to$	$\dfrac{\pi}{2}$
t	0	$\to$	1

よって

$$与式 = \frac{8}{3}\int_0^1 t^3 dt$$

$$= \frac{8}{3}\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

（3） $x^2 + y^2 \leqq 2x$より

$$x^2 - 2x + y^2 \leqq 0$$

$$(x-1)^2 - 1^2 + y^2 \leqq 0$$

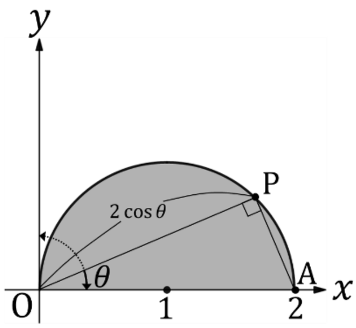
$$(x-1)^2 + y^2 \leqq 1$$

となるから，領域は下の図のようになる．

また，この図において点 A(2，0)とし，円周上の任意の点を P とする．

円周角の性質より，$\angle\mathrm{AOP}$は常に直角となるから，

$\angle\mathrm{AOP} = \theta$とすると，$\mathrm{OP} = 2\cos\theta$となる．



これより，領域Dは以下の不等式で表すことができる．

$$0 \leqq r \leqq 2\cos\theta,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

したがって，与式を極座標に変換すると

$$与式 = \iint_D r^2 \sin^2\theta \cdot r\, dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_0^{2\cos\theta} r^3 \sin^2\theta\ dr\right\} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^4\theta\, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)\cos^4\theta\, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4\theta - \cos^6\theta) d\theta$$

$$= 4\left\{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$= \frac{3}{4}\pi - \frac{5}{8}\pi$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$$

$\boxed{\text{問 2}}$

$z \geqq 0$より

$$0 \leqq h - \frac{h}{2a}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{h}{2a}\sqrt{x^2+y^2} \leqq h$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \leqq 2a$$

$$x^2 + y^2 \leqq 4a^2$$

よって，不等式$x^2 + y^2 \leqq 4a^2$の表す領域をDとすると

$$与式 = \iint_D \left(h - \frac{h}{2a}\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy$$

また，領域Dは，以下の不等式で表すことができる．

$$0 \leqq r \leqq 2a,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$$

したがって，与式を極座標に変換すると

$$与式 = \iint_D \left(h - \frac{h}{2a}\sqrt{r^2}\right)\cdot r\, dr d\theta$$

$$= \iint_D \left(h - \frac{h}{2a}\cdot r\right)\cdot r\, dr d\theta$$

$$= \iint_D \left(hr - \frac{h}{2a}r^2\right) dr d\theta$$

$$= h\int_0^{2\pi} \left\{\int_0^{2a} \left(r - \frac{1}{2a}r^2\right) dr\right\} d\theta$$

$$= h\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{6a}r^3\right]_0^{2a} d\theta$$

$$= h\int_0^{2\pi} \left(2a^2 - \frac{4}{3}a^2\right) d\theta$$

$$= h\cdot\frac{2}{3}a^2 \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{2}{3}a^2 h\Big[\theta\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2}{3}a^2 h\cdot 2\pi = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi a^2 h}$$

（2）例題 2 より，不等式$(x-a)^2 + y^2 \leqq a^2$，$y \geqq 0$の表す領域をD'とすると

求める体積Vは

$$V = 2\iint_{D'} \left(h - \frac{h}{2a}\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy$$

極座標に変換すると，領域D'は以下のような不等式で表すことができる． ※例題 2 より

$$0 \leqq r \leqq 2a\cos\theta,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

したがって，与式を極座標に変換すると

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= 2\iint_{D'}\left(h - \frac{h}{2a}\sqrt{r^2}\right)\cdot r\,drd\theta \\
&= 2h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{2a\cos\theta}\left(r - \frac{1}{2a}r^2\right)dr\right\}d\theta \\
&= 2h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{6a}r^3\right]_0^{2a\cos\theta}d\theta \\
&= 2h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2a^2\cos^2\theta - \frac{4}{3}a^2\cos^3\theta\right)d\theta \\
&= 2h\cdot 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta - \frac{2}{3}\cos^3\theta\right)d\theta \\
&= 4a^2h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta - \frac{2}{3}\cos^3\theta\right)d\theta \\
&= 4a^2h\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) \\
&= \boldsymbol{\left(\pi - \frac{16}{9}\right)a^2h}
\end{aligned}$$